Поверхні другого порядку

Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називається поверхня, описана прямою (твірною), що рухається паралельно сама собі і перетинає лінію (напрямну даній).

1) $F(x, y) = 0$ або $y = f(x)$; 2) $F(x, z) = 0$ або $z = f(x)$; 3) $F(y, z) = 0$ або $z = f(y)$	Рівняння деякої циліндричної поверхні, твірні якої паралельні : 1) осі *O z*; 2) осі *Oy*; 3) осі *Ox*
$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$	Рівняння твірної циліндричної поверхні; x, y, z - змінні (поточній) координати точки циліндричної поверхні *m,n,p* – напрямні коефіцієнти твірної; x_1, y_1, z_1 - точка, що належить напрямній.

Знаходження рівняння циліндричної поверхні

Для знаходження рівняння циліндричної поверхні, напрямна якої задана як лінія перетину двох поверхонь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

а рівняння твірної

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

де x_1, y_1, z_1 - координати точки, що належать напрямній, потрібно вилучити x_1, y_1, z_1 із системи рівнянь

$$\begin{cases} \begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ F_2(x_2, y_1, z_1) = 0 \end{cases} \\ \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \end{cases}$$

Конічні поверхні

	Означення. *Конічною поверхнею* називається поверхня, яку описує пряма (твірна), що проходить через дві точки S і M точка S –фіксована (вершина конічної поверхні), а точка M рухається по деякій просторовій кривій, що називається напрямною конічної поверхні
$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$	Рівняння напрямної конічної поверхні
$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$	Рівняння твірних конічної поверхні x,y,z – поточні координати конічної поверхні; (x_1,y_1,z_1)- точка, яка належить напрямній (x_0,y_0,z_0) – дана точка – вершина конуса.

Знаходження рівняння конічної поверхні

Для знаходження рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівнянням

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

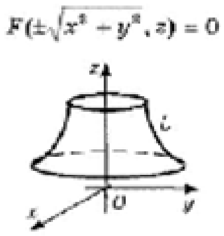
а рівняння твірної

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

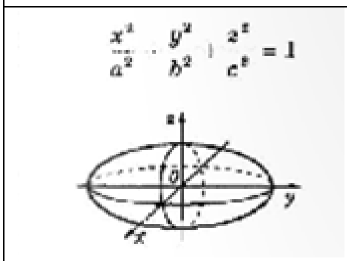
де x_0,y_0,z_0 – координати вершини конуса а x_1, y_1, z_1 – координати точки, що належить напрямній, потрібно вилучити x_1, y_1, z_1із системи рівнянь

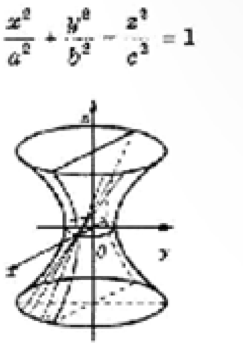
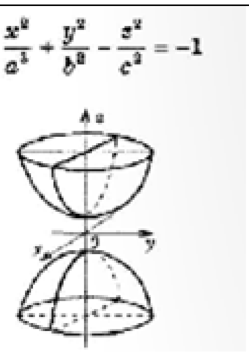
$$\begin{cases} \begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_2,y_1,z_1)=0 \end{cases} \\ \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \end{cases}$$

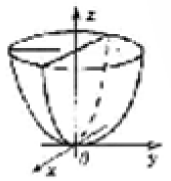
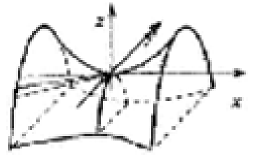
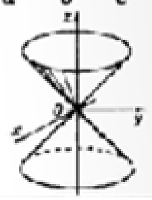
Поверхня обертання

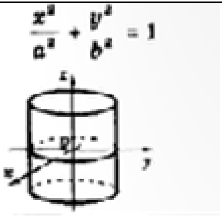
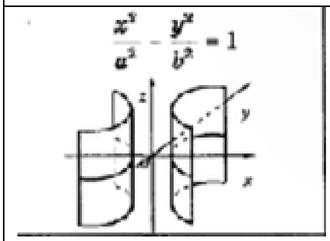
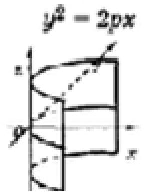
	Рівняння і зображення поверхні, одержаної обертанням навколо осі Oz лінії, заданої рівнянням $\begin{cases} F(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$	Рівняння *сфери*, де a, b, c – координати центра сфери; r – її радіус.
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	Радіуси *сфери* із центром в початку координат.
	Канонічне (найпростіше) рівняння рівняння *еліпсоїда* : a, b, c – півосі еліпсоїда (випадку трьохосьового еліпсоїда) Поверхня симетрично відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат. Поверхня обмежена.
$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Рівняння *еліпсоїда обертання*

 	Канонічне рівняння *однополого гіперболоїда*. Поверхня сиетрична відносно координатних площин xOz і xOz . Дана поверхня називається *лінійчатою* оскільки містить прямолінійні твірні. На малюнку показані три прямолінійні твірні, які проходять через точку з координатами (*a, 0, 0)*. Початок координат є центром симетрії. Поверхня необмежена.
$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Рівняння *однополого гіперболоїда*, одержаного обертанням гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ навколо осі *Oz* (уявної осі)
 	Рівняння *двополого гіперболоїда*, де a, b, c – півосі гіперболоїда. Поверхня симетрична відносно координатних осей і координатних площи*н.* Початок координат є центром симетрії. Поверхня необмежена.
$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Рівняння *двополого гіперболоїда обертання*

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,\ q>0)$ 	Рівняння *еліптичного параболоїда*. Поверхня симетрична відносно координатних площин *xOz, yOz* і *вісі Oz* Центра симетрії немає. Поверхня необмежена.
$x^2+y^2=2pz$	Рівняння *параболоїда обертання*
$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,\ q>0)$ 	Рівняння *гіперболічного параболоїда.* Дана поверхня *лінійчаста*, оскільки містить прямолінійні твірні. На малюнку показані три прямолінійні твірні, які проходять через початок координат – точку (0,0,0). Поверхня симетрична відносно координатних площин *xOz, yOz* осі *Oz* Поверхня не обмежена.
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 	Рівняння *конуса другого порядку* Дана поверхня є *лінійчастою,* оскільки містить прямолінійні твірні. На малюнку показано три прямолінійні твірні, які проходять через початок координат. Поверхня симетрична відносно координатних площин *xOz, yOz, xOy* і координатних осей. Початок координат є центром симетрії, тому поверхня є центральною.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	Рівняння колового конуса. Поверхня симетрична відносно координатних площин і координатних осей. Центральна поверхня.
	Канонічне рівняння *еліптичного циліндра* , твірна якого паралельна осі *Oz* . Поверхня симетрична відносна координатних площин і координатних осей. Центральна поверхня.
$$x^2+y^2=a^2$$	Рівняння *колового циліндра* , твірна якого паралельна осі *Oz*. Це частинний випадок еліптичного циліндра.
	Канонічне *рівняння гіперболічного циліндра*. Координатні площини є площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Центральна поверхня.
	Канонічне рівняння *параболічного циліндра* а твірною, паралельною до вісі *Oz*. Поверхня симетрична відносно координатної площини *xOz* , вісь *Ox* є вісью симетрії. Поверхня не є центральною.

Індивідуальне завдання № 8

Завдання № 1._Встановіть вид поверхні та її розташування відносно початкової системи координат, використовуючи перетворення лівої частини рівняння.

В	Рівняння поверхні	В	Рівняння поверхні
1	$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$	16	$x^2+y^2+z^2-6z-7=0$
2	$x^2+y^2-z^2+2xy+2z-1=0$	17	$3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$
3	$x^2+y^2+2z^2+2xy+4z=0$	18	$4x^2+y^2+9z^2+8x-6y-18z-14=0$
4	$4x^2-y^2-4x+4y-3=0$	19	$x^2+y^2-z^2-2xz+2y-1=0$
5	$x^2+y^2-z^2-2yx+2z-1=0$	20	$3x^2+3y^2+3z^2-6y+4z-1=0$
6	$x^2+y^2+z^2+8x=0$	21	$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$
7	$3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$	22	$4x^2+y^2-4xy-36=0$
8	$x^2+y^2-z^2+2xy+1=0$	23	$4x^2+y^2+9z^2+6x-8y-36z=0$
9	$x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-18z-14=0$	24	$2x^2+y^2+z^2+2yz+4x=0$
10	$x^2+2y^2+z^2+2xz+4y=0$	25	$-x^2+4y^2+4x-4y-3=0$
11	$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$	26	$x^2+y^2+z^2-12x-2y+2z-37=0$
12	$3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$	27	$x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$
13	$x^2+4y^2-z^2-10x-16y+6z+16=0$	28	$9x^2+4y^2+z^2-18x+8y-6z-14=0$
14	$x^2-y^2+z^2+2xz+2y-1=0$	29	$4x^2+y^2+4xy-36=0$
15	$x^2+4y^2-4xy-36=0$	30	$x^2+y^2+z^2-10x-8z+32=0$

Завдання № 2.

В	Умова задачі
	Складіть рівняння еліпсоїда з вершинами $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$, якщо відомо, що координатна площина π перетинає його по колу радіуса *R*.
1	*A(0, 0, 6), B(0, 0, -2), π=OXY, R=3*
6	*A(0, 0, 8), B(0, 0, -4), π=OXY, R=6*

11	$A(6, 0, 0)$, $B(-2, 0,0)$, $\pi=OYZ$, $R=3$
16	$A(8, 0, 0)$, $B(-4, 0, 0)$, $\pi=OYZ$, $R=6$
21	$A(0, 6, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $\pi=OXZ$, $R=3$
26	$A(0, 8, 0)$, $B(0, -4, 0)$, $\pi=OXZ$, $R=6$
	Складіть рівняння двопорожнинного гіперболоїду з вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, якщо відомо, що координатні площини π_1, π_2 є його площинами симетрії і перетинають його по гіперболам, асимптоти яких утворюють з віссю l кути, які дорівнюють відповідно $\frac{\pi}{6}$ і $\frac{\pi}{3}$.
2	$A(0, 0, 6)$, $B(0,0,-6)$, $\pi_1=OXZ$, $\pi_2=OYZ$, $l=OZ$;
7	$A(0, 0, 9)$, $B(0, 0, -9)$, $\pi_1=OXZ$, $\pi_2=OYZ$, $l=OZ$;
12	$A(6, 0, 0)$, $B(-6, 0, 0)$, $\pi_1=OXZ$, $\pi_2=OXY$, $l=OX$;
17	$A(9, 0, 0)$, $B(-9, 0, 0)$, $\pi_1=OXZ$, $\pi_2=OXY$, $l=OX$;
22	$A(0, 6, 0)$, $B(0, -6, 0)$, $\pi_1=OXY$, $\pi_2=OYZ$, $l=OY$;
27	$A(0, 9, 0)$, $B(0, -9, 0)$, $\pi_1=OXY$, $\pi_2=OYZ$, $l=OY$.
	Складіть рівняння еліптичного параболоїду з вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$ і віссю симетрії, паралельною до вісі l_1, якщо відомо, що π_1 перетинає його вздовж еліпсу, вісі якого паралельні осям l_2 і l_3, причому еліпс їх дотикається.
3	$A(2, 3, 6)$, $l_1=OZ$, $\pi=OXY$, $l_2=OX$, $l_3=OY$;
8	$A(2, 3, -6)$, $l_1=OZ$, $\pi=OXY$, $l_2=OX$, $l_3=OY$;
13	$A(6, 2, 3)$, $l_1=OX$, $\pi=OYZ$, $l_2=OY$, $l_3=OZ$;
18	$A(-6, 2, 3)$, $l_1=OX$, $\pi=OYZ$, $l_2=OY$, $l_3=OZ$;
23	$A(2, 6, 3)$, $l_1=OY$, $\pi=OXZ$, $l_2=OX$, $l_3=OZ$;
28	$A(2, -6, 3)$, $l_1=OY$, $\pi=OXZ$, $l_2=OX$, $l_3=OZ$;
	Складіть рівняння гіперболічного параболоїду, якщо відомо, що він проходить через задану гіперболу, його площинами симетрії є декартові площини π_1, π_2 , а площина π_3 перетинає його по двом прямим.

4	$\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\\ z=4\end{cases}$; *π₁=OXZ , π₂=OYZ, π₃=OXY*
9	$\begin{cases}\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1\\ z=3\end{cases}$; $\pi_1=OXY$, $\pi_2=OXZ$, $\pi_3=OXZ$
14	$\begin{cases}\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1\\ z=3\end{cases}$; $\pi_1=OXZ$, $\pi_2=OYZ$, $\pi_3=OXY$
19	$\begin{cases}\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{9}=1\\ x=3\end{cases}$; $\pi_1=OXY$, $\pi_2=OXZ$, $\pi_3=OYZ$
24	$\begin{cases}\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1\\ z=5\end{cases}$; $\pi_1=OXZ$, $\pi_2=OYZ$, $\pi_3=OXY$
29	$\begin{cases}\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1\\ y=5\end{cases}$; $\pi_1=OXY$, $\pi_2=OYZ$, $\pi_3=OXZ$
	Складіть рівняння еліптичного параболоїду, якщо відомо, що площини π_1, π_2 , перетинають його по параболам з вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, площина π_3 дотикається параболоїда в його вершині, а площини π_4, π_5 є його площинами симетрії π_1, π_2
5	π_1: x=3; π_2: y=4; A(3,0,5), B(0,4,5), $\pi_3=OXY$, $\pi_4=OXZ0$, $\pi_5=OYZ$
10	π_1:x=3; π_2:z=4; A(3,5,0), B(0,5,4), $\pi_3=OXZ$, $\pi_4=OXY$, $\pi_5=OYZ$
15	π_1:y=5; π_2:z=6; A(4,0,6), B(4,5,0), $\pi_3=OYZ$, $\pi_4=OXZ$, $\pi_5=OXY$
20	π_1:x=6; π_2;y=5; A(6,0,4), B(0,5,4), $\pi_3=OXY$, $\pi_4=OXZ$, $\pi_5=OYZ$
25	π_1:y=5; π_2:z=4; A(7,0,4), B(7,5,0), $\pi_3=OYZ$, $\pi_4=OXZ$, $\pi_5=OXY$
30	π_1:x=4; π_2:y=5; A(4,0,7), B(0,5,7), $\pi_3=OXY$, $\pi_4=OXZ$, $\pi_5=OYZ$

Завдання № 3. Визначить вид поверхні, використовуючи інваріанти; складіть її канонічне рівняння і знайдіть канонічну систему координат.

В	Рівняння поверхні
1	$x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8zx-14x-4y+14z+18=0$
2	$4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8xz-28x+2y+16z+45=0$
3	$5x^2+8y^2+5z^2-4xy+4yz+8zx-6x+6y+6z+10=0$
4	$2x^2+5y^2+2z^2-2xy+2yz-4zx+2x-10y-2z-1=0$

5	$2xy+2yz+2zx+2x+2y+2z+1=0$
6	$7x^2+7y^2+16z^2-10xy-8yz-8zx-16x-16y-8z+72=0$
7	$3x^2+3y^2+3z^2+2xy-2yz-2zx-2x-2y-2z-1=0$
8	$4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y+10z-2=0$
9	$2x^2+6y^2+2z^2+8zx-4x-8y+3=0$
10	$2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16zx+60x-12y+12z-90=0$
11	$5x^2+2y^2+5z^2-4xy-4yz-2zx+10x-4y+2z+4=0$
12	$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$
13	$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$
14	$2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$
15	$4xy+4yz+4zx+4x+4y+4z+3=0$
16	$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+3zx-4x+6y-2z+3=0$
17	$x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0$
18	$x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z-1=0$
19	$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$
20	$x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx-6z+1=0$
21	$4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx+4x-6y+2z-5=0$
22	$5x^2-y^2+z^2+4xy+6zx+2x+4y+6z-8=0$
23	$2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0$
24	$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0$
25	$x^2+y^2-3z^2-2xy-6yz-6zx+2x+2y+4z=0$
26	$2x^2+y^2-2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$
27	$x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-10zx+x+y-z=0$
28	$x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx-x+2y-3z-6=0$
29	$3x^2-4y^2+3z^2+4xy-4yz+10zx+6x-20y-14z-24=0$
30	$5x^2+4y^2+3z^2+9xy+7yz+8zx+7x+6y+5z+2=0$